# به نام خدا

## مبحث:
## یک زبان رسمی برای نظریه مجموعه ها

کانتور در توسعه نظریه مجموعه‌ها از رویکردی غیر رسمی استفاده کرد. به طور مثال، کانتور به طور منظم از **اصل دریافت** استفاده می‌کرد:

*گردایه‌ای از اشیاء که یک ویژگی مشترک دارند، یک مجموعه را تشکیل می‌دهند .*

بنابراین اگر ویژگی $P(x)$ داده شده باشد، اصل دریافت نتیجه می‌دهد که $\{x : P(x)\}$ یک مجموعه است.

با استفاده از این اصل می توانیم *اشتراک* مجموعه‌های $A$ و $B$ را از طریق ویژگی «$x \in A$ و $x \in B$» بسازیم؛ به عبارت دیگر اشتراک دو مجموعه $A$ و $B$، مجموعه $\{x : x \in A \text{ و } x \in B\}$ است.

به طور مشابه می‌توانیم *اجتماع* مجموعه‌های $A$ و $B$ را به صورت $\{x : x \in A \text{ یا } x \in B\}$ در نظر بگیریم.

تهیه کننده: دکتر منصوره موسوی پور

اصل دریافت، به کانتور اجازه داد تا وجود بسیاری از مجموعه‌ها را ثابت کند.

امروزه روش کانتور در نظریه مجموعه‌ها، به عنوان *نظریه مجموعه‌های ساده و بی‌تکلف* شناخته می‌شود.

تهیه کننده: دکتر منصوره موسی پور

در اوایل ۱۹۰۰ میلادی دانشمندانی همانند امیل بورل ، رنه-لوئیس بئر و
هنری لبگ ، با استفاده از مفاهیم بنیادی نظریه مجموعه‌ها، نظریه اندازه و نظریه تابع را ابداع کردند.
کار این ریاضیدانان (و ریاضیدانان دیگر) پر فایده بودن نظریه مجموعه‌ها را برای ریاضیات، ثابت کرد.

ریاضیدانان با تأکید بر نظریه مجموعه‌های ساده و بی‌تکلف کانتور، قضیه‌های مهم زیادی را کشف و ثابت کردند. تا اینکه یک تناقض ویرانگر توسط برتراند راسل معرفی شد.

تهیه کننده: دکتر منصوره موسی پور

## • پارادوکس راسل:

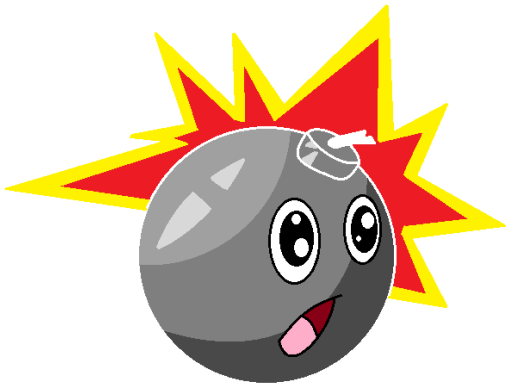
ویژگی $x \notin x$ را در نظر بگیرید که در آن $x$ نشان‌دهنده یک مجموعه است. اصل دریافت به ما اجازه می‌دهد که نتیجه بگیریم $A = \{x : x \notin x\}$ یک مجموعه است. بنابراین

*مجموعه $A$ شامل همه مجموعه‌های $x$ با ویژگی $x \notin x$ می‌باشد.* (▲)

به وضوح $A \in A$ یا $A \notin A$. فرض کنیم $A \in A$. بنابراین همان‌طور که در (▲) اشاره شد $A$ باید دارای ویژگی $A \notin A$ باشد که یک تناقض است. حال فرض کنیم $A \notin A$. چون دارای ویژگی $A \notin A$ می‌باشد، از (▲) نتیجه می‌گیریم که $A \in A$ که باز هم یک تناقض است.

تهیه کننده: دکتر منصور موسی پور

به این ترتیب، پارادوکس راسل بسیاری از پایه‌های ریاضیات و نظریه مجموعه‌ها را تهدید کرد.



چون اگر کسی بتواند یک تناقض را از اصل دریافت نتیجه بگیرد، می‌تواند هر چیزی را نتیجه بگیرد؛ به ویژه می‌تواند ثابت کند که ۲ = ۱. بنابراین نظریه مجموعه‌های کانتور ناسازگار است. در نتیجه اعتبار کارهای خیلی مهم بورل و لبگ زیر سوال رفت. به زودی مشخص شد که نیاز است که اصل دریافت را با روش‌هایی محدود کنیم و باید به این سئوال پاسخ دهیم که چگونه می‌توانیم به طور درستی، یک مجموعه بسازیم؟

تهیه کننده: دکتر منصوره موسوی پور

ارنست زرملو  با ایجاد مجموعه‌ای از اصول موضوع، مشکلات ایجادشده درباره اصل دریافت را حل کرد.  مدت کوتاهی پس از آن آبراهام فرانکل  اصول موضوع زرملو را اصلاح و اصول موضوع زرملو-فرانکل را تدوین کرد که در حال حاضر قاعده‌ای پذیرفته شده از ایده کانتور درباره ماهیت مجموعه‌ها می‌باشد.  به ویژه این اصول موضوع به ما اجازه می‌دهند که مجموعه توانی بسازیم و اجتماع و اشتراک دو مجموعه را تشکیل دهیم. همچنین آن‌ها ابزارهای بسیار متنوعی را برای بررسی موضوعات عمیق‌تر ریاضیات، مانند بینهایت و مجموعه‌های نامتناهی، در اختیار ما قرار می‌دهند.

- (با این اصول در فصل مجموعه ها آشنا خواهیم شد.)

تهیه کننده: کامران منصوره موسی پور

قبل از اینکه اصول موضوع نظریه مجموعه‌ها را بیان کنیم، باید یک زبان رسمی برای آن تعریف کنیم. این زبان شامل رابطهای منطقی $\wedge$، $\vee$ ، $\sim$ ، $\rightarrow$ و $\leftrightarrow$ به همراه سورهای $\forall$ و $\exists$ است. به علاوه در زبان رسمی از نمادهای رابطه‌ای $=$ و $\in$ استفاده می‌کنیم (همچنین از $\neq$ و $\notin$).

تهیه کننده: دکتر منصوره موسی پور

یک فرمول در *زبان نظریه مجموعه‌ها* چیست؟ یک **فرمول اتمی** به صورت $x \in y$ یا $x = z$ است که $x$ و $y$ و $z$ می‌توانند با متغیرهای دیگر مثل $a$، $b$، $x'$، $y'$، $z'$، $x_1$، $x_2$، $y_5$، $X$، $Y$ و . . . جایگزین شوند. می‌گوییم $X$ یک **فرمول** (در زبان نظریه مجموعه‌ها) است اگر $X$ یک فرمول اتمی باشد یا اینکه بتوانیم آن را با فرمول‌های اتمی و چند بار تکرار **قانون بازگشتی** بنویسیم که قانون بازگشتی به صورت زیر بیان می‌شود:

اگر $\varphi$ و $\psi$ فرمول باشند، هر کدام از هفت مورد زیر نیز فرمول هستند:

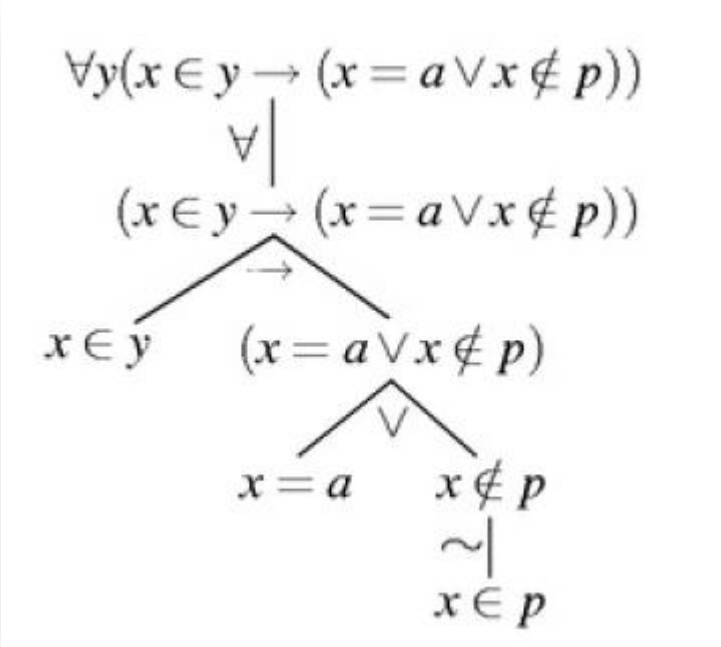
$$\forall x\, \varphi,\ \exists y\, \psi,\ (\sim \varphi),\ (\varphi \wedge \psi),\ (\varphi \vee \psi),\ (\varphi \rightarrow \psi),\ (\varphi \leftrightarrow \psi).$$

تهیه کننده: دکتر منصوره موسی پور

به طور مثال $x \neq 3$ یک فرمول است چون آن را می توان به صورت $\sim(x = 3)$ نوشت

همچنین $\exists x(x \neq 3)$ نیز یک فرمول است

بنابراین به طور مثال $\forall y \left(x \in y \to (x = a \ \vee \ x \notin p)\right)$، در زبان نظریه مجموعه‌ها یک فرمول است، چون از فرمول‌های اتمی $x \in y$، $x = a$، $x \in p$ و تکرار قانون بازگشتی بالا ساخته شده است. شکل چگونگی ساخته شدن این فرمول را نشان می‌دهد که در آن برای نشان دادن $(\sim x \in p)$ می‌نویسیم $x \notin p$.




تهیه کننده: دکتر منصوره موسی پور

**مثال.** عبارت $\forall x\,((\rightarrow xy$ یک فرمول نیست چون آن را با فرمول‌های اتمی و قانون بازگشتی، نمی‌توان ساخت.

فرمول‌ها در زبان نظریه مجموعه‌ها، به عنوان گزاره‌هایی که «از لحاظ قواعد نگارش درست هستند» در نظر گرفته می‌شوند.

تهیه کننده: دکتر منصوره موسی پور

از سه قراداد زیر برای پرانتزگذاری استفاده می‌کنیم ($\psi$ و $\varphi$ فرمول‌های دلخواهی هستند):

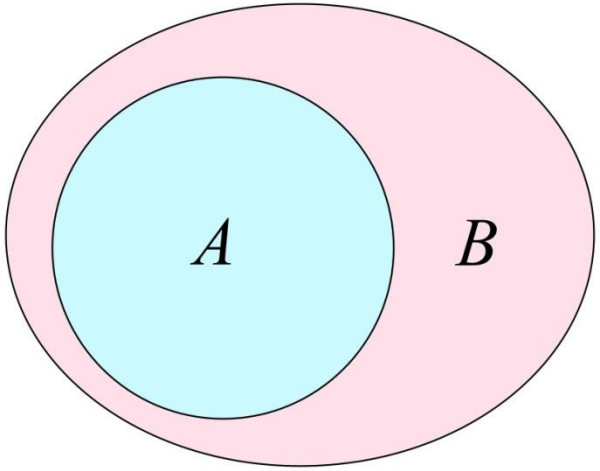
۱. لزومی ندارد که پرانتزهای بیرونی نوشته شوند، یعنی می‌توانیم برای نشان دادن $(\varphi \wedge \psi)$ بنویسیم $\varphi \wedge \psi$.

۲. نماد نفی (نقیض) روی کمترین قسمت ممکن اعمال می‌شود. بنابراین می‌توانیم از $\sim \varphi \wedge \psi$ برای نشان دادن $(\sim \varphi) \wedge \psi$ استفاده کنیم.

۳. مجموعه‌های محدودکننده سورها، باید استفاده شود. بنابراین می‌توانیم فرمول $\forall x\ (x \in y \to x \notin a)$ را به صورت خلاصه‌تر $(\forall x \in y)(x \notin a)$ بنویسیم.

تهیه کننده: دکتر منصوره موسی پور

ما همچنین از نمادهایی که برای یادگیری آسان‌تر طراحی شده‌اند، استفاده می‌کنیم. به طور مثال ممکن است به جای $\forall x\ (x \in A \rightarrow x \in B)$، بنویسیم $A \subseteq B$.




تهیه کننده: دکتر منصوره موسی پور

در سراسر این کتاب از نماد $\varphi(x, \ldots, z)$ استفاده خواهیم کرد. برای اینکه نشان دهیم $x$، ... و $z$ متغیرهای آزاد هستند. اگر متغیرهای $x$، ... و $z$ آزاد باشند، می‌توانیم جایگزینی انجام دهیم. به طور مثال می‌توانیم همه مواردی که $x$ در فرمول $\varphi$ ظاهر شده است را با یک مجموعه خاص $x_0$، جایگزین کنیم و $\varphi(x_0, \ldots, z)$ را به دست آوریم. به علاوه یک فرمول ممکن است شامل پارامترها باشد، یعنی متغیرهای آزادی به غیر از $x$، ... و $z$ باشد که نشان‌دهنده مجموعه‌های نامشخص (دلخواه) می‌باشند. پارامترها را به عنوان «مجموعه‌های نامشخص ثابت» در نظر می‌گیرند.

تهیه کننده: دکتر منصوره موسی پور

# چند مثال:

فرمول $\varphi(x,y)$ را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\exists z(x+y \in z \to x+y \neq 0).$$

در اینجا $x$ و $y$ متغیرهای آزاد هستند و $0$ ثابت است.

اگر به جای $x$ متغیر $a$ قرار دهیم $\varphi(a,y)$ به صورت زیر است:

$$\exists z(a+y \in z \to a+y \neq 0).$$

اگر به جای $x$ عدد ۳ قرار دهیم $\varphi(3,y)$ به صورت زیر است:

$$\exists z(3+y \in z \to 3+y \neq 0).$$

مثال . فرض کنیم $\varphi(x)$ فرمول زیر باشد:

$$\forall y\Big(x \in y \;\rightarrow\; (x = \varnothing \vee x \notin p)\Big).$$

در این فرمول $x$ یک متغیر آزاد است، $\varnothing$ به عنوان یک ثابت و $p$ یک پارامتر (مجموعه نامشخص) است. جایگزینی پارامتر $p$ در فرمول $\varphi(x, \ldots, z)$ با مجموعه مشخص $p_0$، به این معنی است که در فرمول $\varphi$ هر جا $p$ بود به جای آن $p_0$ قرار دهیم.

به طور مثال اگر قرار دهیم $P = \{1, 2\}$، فرمول بالا را می توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\forall y\big(x \in y \rightarrow (x = \emptyset \vee x \notin \{1, 2\})\big).$$

تهیه کننده: دکتر منصوره موسی پور

**مثال.**

**الف)** فرمول $\exists x(x \in y)$ بیان می‌کند که مجموعه $y$ ناتهی است.

**ب)** فرمول $\sim \exists y\, \forall x\, (x \in y)$ بیان می‌کند که «مجموعه‌ای شامل تمام مجموعه‌ها وجود ندارد.»

**مثال.**

**الف)** عبارت «مجموعه $x$ حداقل دو عنصر دارد» را می‌توانیم به صورت زیر، به زبان نظریه مجموعه‌ها بنویسیم:

$$\exists y\, \exists z \Big( (y \in x \wedge z \in x) \wedge y \neq z \Big).$$

**ب)** فرض کنیم $\varphi(z)$ یک فرمول با متغیر آزاد $z$ و فرض کنیم $a$ یک مجموعه باشد. جمله «یک مجموعه $x$ وجود دارد که اعضای آن فقط $y$هایی هستند که $y \in a$ و $\varphi(y)$»، به صورت فرمول زیر بیان می‌شود:

$$\exists x\, \forall y \Big( y \in x \longleftrightarrow \big( y \in a \wedge \varphi(y) \big) \Big).$$

تهیه کننده: دکتر منصور موسی پور

**مثال.** فرض کنید $\varphi(x)$ و $\psi(x)$ فرمول‌های دلخواهی باشند. رابطه زیر را در نظر بگیرید:

$$y = \begin{cases} a, & \text{اگر } \varphi(x) \\ b, & \text{اگر } \psi(x) \text{ باشد و } \varphi(x) \text{ نباشد} \\ \varnothing, & \text{در غیر اینصورت.} \end{cases} \tag{۱.۱}$$

این رابطه در زبان نظریه مجموعه‌ها می‌تواند به این صورت بیان شود:

$$\Big(\varphi(x) \wedge y = a\Big) \vee \Big(\Big(\psi(x) \wedge \sim \varphi(x)\Big) \wedge y = b\Big) \vee \Big(\Big(\sim \psi(x) \wedge \sim \varphi(x)\Big) \wedge y = \varnothing\Big). \tag{۲.۱}$$

تهیه کننده: دکتر منصوره موسی پور

- تمرین

۱. فرمول $\forall z\, \exists x\, \exists y\, (x \in y \wedge y \in z)$ را به فارسی بیان کنید.

۲. فرض کنید $\varphi(x)$ یک فرمول باشد. در این‌صورت $\forall z\, \forall y \left( \left( \varphi(x) \wedge \varphi(y) \right) \longrightarrow z = y \right)$ چه چیزی را بیان می‌کند؟

۳. فرض کنید $a$، $b$، $C$ و $D$، مجموعه باشند. رابطه زیر را به زبان نظریه مجموعه‌ها بیان کنید:

$$y = \begin{cases} a, & x \in C \setminus D \text{ اگر} \\ b, & x \notin C \setminus D \text{ اگر.} \end{cases}$$

تهیه کننده: دکتر منصور موسی پور